

Un modèle simple de la pénétration couplée de chaleur et de matière dans l'absorption gaz-liquide en film ruisselant laminaire

H. LE GOFF, A. RAMADANE et P. LE GOFF

Laboratoire des Sciences du Genie Chimique, E.N.S.I.C., 1 rue Grandville, 54042 Nancy Cédex, France

(Reçu le 29 Mars 1985)

Résumé— Dans le présent article, nous présentons un modèle simple basé sur la pénétration couplée des fronts thermique et matériel pour l'étude de la cinétique d'absorption d'une vapeur dans une solution de sel très concentrée ruisselant en régime laminaire à la surface d'une paroi adiabatique. Bien qu'il soit très simple, ce modèle permet de comprendre de manière concrète et intuitive le couplage des transferts simultanés, ainsi que les résultats de l'intégration numérique des équations différentielles. Les prévisions de ce modèle dans le cas de l'absorption de vapeur d'eau dans une solution de bromure de lithium, sont présentées et comparées aux résultats du modèle numérique rigoureux.

1. INTRODUCTION

DANS UNE publication précédente [1] nous avons souligné l'intérêt primordial de la modélisation des transferts simultanés et couplés de matière et de chaleur, pour représenter le fonctionnement des appareils d'absorption gaz-liquide, généralement accompagnée d'un effet thermique important. Tel est notamment le cas des pompes à chaleur à absorption. Dans cette publication, nous avons présenté les résultats de méthodes numériques rigoureuses de résolution des équations différentielles de transfert, appliquées à l'absorption d'une vapeur dans un liquide ruisselant en film laminaire à la surface d'une paroi verticale adiabatique.

Les résultats étaient présentés sous forme de profils longitudinaux et transversaux de température et de concentration du solvant absorbé. Or certains de ces profils affectaient des formes a priori difficiles à comprendre par intuition directe. Par exemple, les profils longitudinaux de concentration comportaient des maximums, tandis que les profils transversaux étaient un réseau de courbes qui se croisaient.

Dans le but d'éclaircir et d'explicitier ces phénomènes, qui résultent en fait du *couplage* entre les transferts de matière et de chaleur, nous nous proposons, dans le présent article, de reprendre ce même problème d'une manière concrète, simple et intuitive, basée sur des approximations adéquates. Cette approche simpliste aura de plus l'avantage de conduire à des expressions algébriques simples des profils de température et de concentration ainsi que des flux de transferts.

2. EVOLUTION DU FILM RUISSELANT EN COORDONNEES DE LAGRANGE

2.1. Le diagramme de ponchon (H, x)

Considérons un globule de concentrat qui pénètre en tête de l'absorbeur, avec la température T_1 , le titre

massique de soluté x_1 , et l'enthalpie H_1 . Il est représenté par le point F sur le diagramme de Ponchon (Fig. 1). L'expérience montre qu'alors, en un temps extrêmement court, la surface du liquide se met en équilibre thermodynamique avec la phase-vapeur dont la pression est P_v . Le point E_1 représentatif de cette surface est situé sur l'isobare P_v et on montre (voir annexe) qu'il est relié au point d'entrée F par la "droite de conjugaison" d'équation :

$$\frac{H_{e2} - H_1}{x_{e2} - x_1} = -H_d \cdot Le^n \quad (1)$$

où n est un exposant qui vaut $2/3$ dans le cadre de l'analogie de Colburn [2], et Le est le nombre de Lewis : $Le \equiv D/a$.

Ensuite, à mesure que le globule de solution descend dans le film, et se mélange avec la vapeur condensée, son titre moyen \bar{x} de sel diminue et son enthalpie \bar{H} augmente. Les bilans de matière et d'enthalpie (voir annexe) permettent d'établir l'équation de la trajectoire du point représentatif du "coeur" du film ruisselant. Le calcul montre que cette trajectoire est une droite, dite

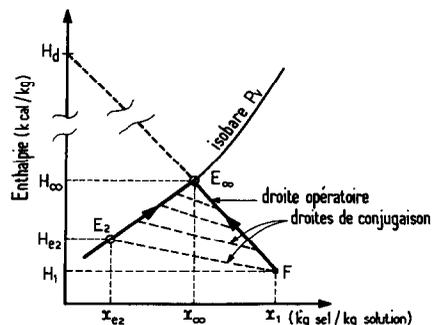


FIG. 1. Représentation des trajectoires du coeur $\bar{H}(\bar{x})$ et de l'interface $H_e(C_e)$ du film, et des droites de conjugaison dans le diagramme de Ponchon (cas d'un absorbeur adiabatique).

NOMENCLATURE

A	pente de l'isobare d'équilibre linéarisée. [$\text{kg m}^{-3} \text{K}^{-1}$], $C_e = AT_e + B$	T, T', \bar{T}	température de la solution, à l'équilibre et moyenne [$^{\circ}\text{C}$ ou K]
a	diffusivité thermique [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]	t	temps de contact des phases vapeur et liquide [s]
B	terme constant de l'isobare linéarisée [kg m^{-3}]	u, u_f	vitesses linéaire et moyenne de l'écoulement, [m s^{-1}]
C, C', \bar{C}	concentration du solvant dans la solution, à l'équilibre et moyenne [kg m^{-3}]	x, \bar{x}	titre massique de soluté dans la solution, et titre moyen
\bar{C}_m	chaleur spécifique moyenne de la solution [$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$]	y, y_T, y_M	abscisse horizontale dans le film, et profondeurs de pénétration des fronts thermique et matériel [m]
D	diffusivité matérielle [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]	Z	cote verticale [m].
E, F	points représentant l'interface et l'entrée dans le diagramme de Ponchon	Symbols grecs	
F	rapport arbitraire, équation (9)	δ	épaisseur du film [m]
H, \bar{H}	enthalpie de la solution et sa valeur moyenne [J kg^{-1}]	$\bar{\eta}_T$	efficacité thermique relative moyenne, $(\bar{T} - T_1)/(T_{\infty} - T_1)$
H_d	enthalpie de vaporisation du solvant [J kg^{-1}]	λ	conductivité thermique [$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$]
h, k	conductances de transfert de chaleur et de matière de l'interface au coeur du film [$\text{W m}^2 \text{K}^{-1}$], [m s^{-1}]	μ	viscosité dynamique [$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$]
l	largeur du film [m]	ν	viscosité cinématique [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]
Le	nombre de Lewis, D/α	ρ	masse volumique [kg m^{-3}]
M, M_e	débit de solution et de solvant [kg s^{-1}]	Φ_T	densité de flux de chaleur [W m^{-2}]
P_v	pression absolue dans la phase gazeuse [Pa ou mmHg]	Ω	aire de la section droite du film [m^2].
Pr	nombre de Prandtl, $\lambda/\mu C_m$	Indices	
Q	flux de chaleur [W]	e	relatif à l'interface vapeur-liquide
r	rapport adimensionnel, $A H_d/\bar{C}_m \cdot \rho$ (Tableau 1)	f	relatif au film
Re	nombre de Reynolds, $u_f \delta/\nu$	g	relatif à la paroi côté film
Sc	nombre de Schmidt, ν/D	i	relatif à la paroi du côté opposé
St_M, St_T	nombres de Stanton matériel et thermique, $k/u_f, h/\rho u_f \bar{C}_m$	1	relatif à l'entrée
		2, 3, 4	relatifs à la fin des 1ère, 2ème et 3ème périodes
		∞	relatif à la sortie d'un absorbeur infiniment long.

“droite opératoire” dont l'équation est :

$$\frac{\bar{H} - H_1}{\bar{x} - x_1} = - \frac{H_d - H_1}{x_1} = \text{cste.} \quad (2)$$

Autrement dit, la droite opératoire, qui part du point d'entrée F , va couper l'axe des ordonnées ($x = 0$) au point H_d connu.

Le point E_{∞} d'intersection de la droite opératoire et de l'isobare d'équilibre, est un état d'équilibre qui ne serait atteint qu'au bout d'un temps de contact infini, donc au bout d'une hauteur de chute du film ruisselant infiniment grande. Le segment $[F, E_{\infty}]$ est le lieu des points représentatifs de la sortie des absorbeurs de hauteur quelconque entre zéro et l'infini.

Pendant cette évolution du “coeur” du globule de fluide, sa surface au contact de la vapeur *reste en équilibre* avec cette vapeur, alors même que sa composition évolue. Le point représentatif de cette surface se déplace donc sur l'isobare P_v , en partant du

point E_1 et atteignant le point-limite E_{∞} , au bout d'un temps infini. Les points représentant l'interface et le coeur, à une même cote, restent reliés par la droite de conjugaison, d'équation (1).

2.2. Le diagramme (T, C)

La Fig. 2 montre les mêmes évolutions, du coeur et de l'interface du film, sur un diagramme où la température T est portée en fonction de la concentration C du solvant dans la solution. Les relations entre les variables (H, x) et (T, C) sont les suivantes :

$$\left. \begin{aligned} C &= \rho(1 - x) \\ H - H_0 &= C_m \rho T - C_{m0} \rho_0 T_0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Du fait que ρ et C_m ne sont pas des coefficients constants, mais dépendent de T et de C , les propriétés d'additivité du diagramme de Ponchon ne sont pas conservées sur le diagramme (T, C). Il en résulte que la trajectoire du coeur du film n'est pas une droite, mais

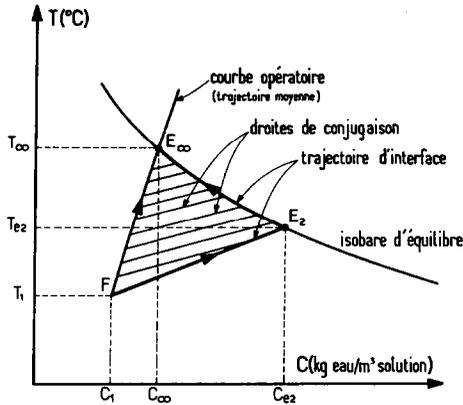


FIG. 2. Représentation des trajectoires du coeur et de l'interface du film, et des droites de conjugaison dans le diagramme T(C) (cas d'un absorbeur adiabatique).

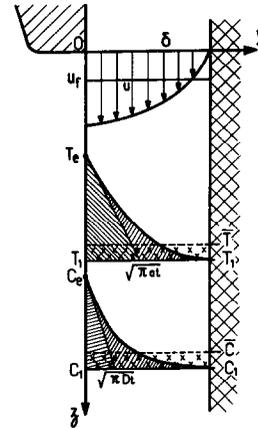


FIG. 3. Allure générale des profils de vitesse, de température et de concentration. Représentation du principe de simplification du modèle linéaire, et de la notion des températures et concentration moyennes (T̄, C̄).

une courbe. Toutefois, le calcul [3] montre que, dans le cas fréquent où les variations de T et de C sont faibles, cette courbe opératoire est très peu différente de la droite ayant pour équation :

$$\frac{\bar{T} - T_1}{\bar{C} - C_1} = \left(\frac{H_d}{C_m \rho} \right) \quad (4)$$

Il en est de même de la droite de conjugaison qui relie les points de coeur et d'interface : sa pente n'est plus rigoureusement constante, mais seulement approximativement avec la valeur moyenne

$$\frac{T_e - \bar{T}}{C_e - \bar{C}} = \left(\frac{H_d}{C_m \rho} \right) \cdot Le^n \quad (5)$$

2.3. Scenario de la pénétration des fronts de chaleur et de concentration de solvant

Suivons par la pensée l'évolution, en repère de Lagrange, d'un globule de solution concentrée qui sort de l'ajutage au temps t₁ = 0. A mesure que le globule descend dans le film, le solvant condensé en surface diffuse vers l'intérieur et il en est de même de la chaleur dégagée en surface par la condensation du solvant. La Fig. 3 montre, à un instant t ultérieur, les profils de température et de concentration de solvant, perpendiculairement à l'interface. Remplaçons ces profils curvilignes par des profils rectilignes, constitués par les tangentes à l'interface. Nous montrerons plus loin (voir paragraphe 3.1) que l'erreur ainsi commise est de l'ordre de 22% par défaut.

Ce modèle linéaire, que nous qualifions de "simplissime" [3, 4], nous permet de mieux comprendre le scénario de la pénétration des deux fronts de chaleur et de concentration, et de distinguer les quatre périodes successives suivantes, schématisées sur la Fig. 4.

Période I : équilibrage de l'interface. La durée t₂ de cette lère période est le temps au bout duquel la surface liquide s'est mise en équilibre thermique avec la phase gazeuse. T_{e1} passe à T_{e2} et C_{e1} passe à C_{e2}. Du fait

que ce temps est extrêmement court, en comparaison du temps de contact des phases, la pénétration des fronts au bout du temps t₂ est négligeable.

Période II : traversée du profil thermique. La fin de la 2ème période est définie par le fait que le profil de température "traverse" l'épaisseur du film. Autrement dit, au temps t₃, la profondeur de pénétration thermique y_{T3} est égale à l'épaisseur δ du film. Par contre, le profil de concentration n'a pénétré que très peu dans le film.

Période III : remplissage thermique et traversée du profil de concentration. A partir du temps t₃, la température de paroi T_{g1} "décolle" de sa valeur initiale T_{g1} = T₁ et commence à croître. De même la température d'interface T_e cesse d'être constante et croît. Le profil de température se déforme et monte comme le schématise le croquis de la Fig. 4. Mais corrélativement, la concentration d'interface C_e ne peut que décroître à partir de C_{e2}, puisque le point d'interface (T_e, C_e) doit nécessairement se déplacer sur l'isobare d'équilibre (Fig. 2). La fin de la période III est définie par le fait que le profil de concentration atteint la paroi, soit y_{M4} = δ. Il est important de remarquer que cette évolution du profil de concentration entraîne un "croisement" des profils successifs, comme le montre la Fig. 4.

Période IV : remplissages thermique et matériel. A partir du temps t₄, la concentration de paroi C_g "décolle" de sa valeur initiale C₁ et commence, elle aussi, à croître. La concentration à l'interface C_e continue à décroître, pour la même raison que ci-dessus. Les profils de concentration successifs présentent donc encore le phénomène de croisement. Simultanément le profil de température continue à s'élever, à peu près uniformément. Au bout d'un temps infini, la température et la concentration atteindraient les valeurs limites T_∞ et C_∞, uniformes dans toute l'épaisseur du film.

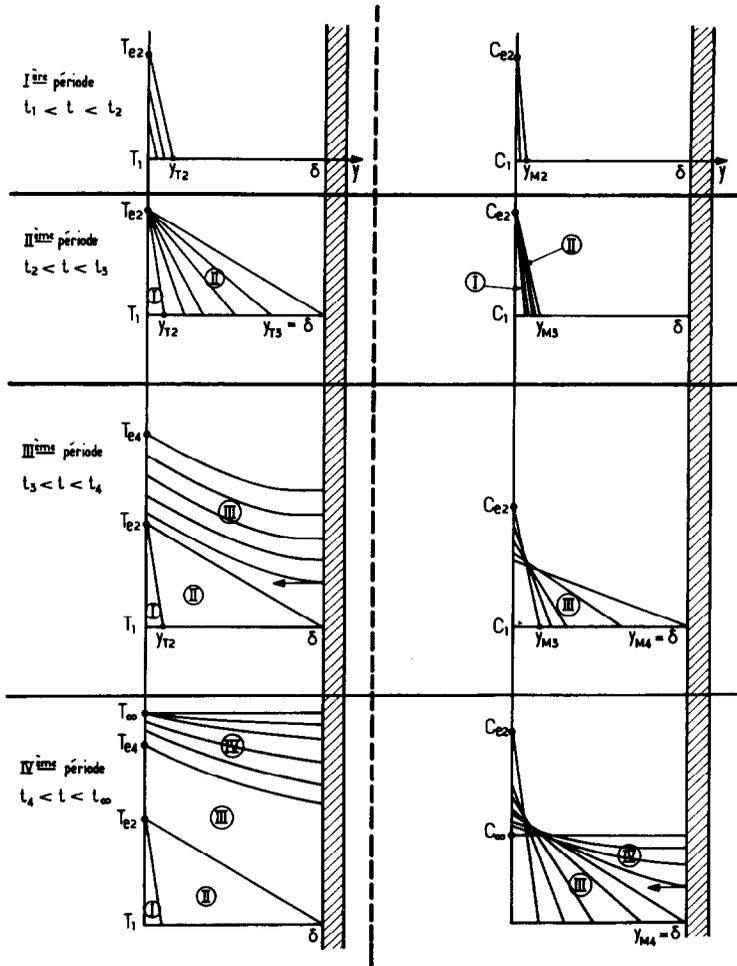


FIG. 4. Scénario de la pénétration des fronts thermique et matériel en quatre périodes.

3. MODELE A PROFILS LINEAIRES

3.1. Principe de la simplification

Rappelons l'exemple classique du problème de conduction de la chaleur dans un espace semi-infini, à partir d'une source plane à température constante. L'intégration de l'équation différentielle de la chaleur donne l'expression du profil de température au bout d'un temps t :

$$T - T_1 = (T_e - T_1) \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}}. \tag{6}$$

La tangente à l'origine coupe l'axe des abscisses au point $y = \sqrt{\pi at}$ (Fig. 3). La quantité de chaleur représentée par la surface du triangle sous-tendu par la tangente, vaut 78,5% de toute la surface contenue sous la courbe erfc. Autrement dit, en remplaçant le front de pénétration en fonction erfc par le front de pénétration linéaire, donné par la tangente à l'origine, on commet une erreur par défaut de 21,4%.

Il est à noter que pour une profondeur de pénétration double, soit $2\sqrt{\pi at}$, l'erreur tombe à 1,2%.

Ce raisonnement peut être transposé, exactement de la même manière, à la diffusion d'un constituant matériel.

3.2. Etude de la période I

Le fait de supposer que la période I a une durée rigoureusement nulle impliquerait que les flux de matière et de chaleur soient infiniment grands à l'instant initial. Nous retrouverons ici un paradoxe classique dans l'étude de nombreux phénomènes de transfert. Pour résoudre cette difficulté divers auteurs, notamment Vernotte [5] et Luikov [6] ont proposé de remplacer les lois linéaires de Fourier et de Fick par des lois plus complexes, contenant un terme d'inertie. Nous nous appuierons plutôt sur des arguments de nature physique, pour éviter d'énoncer que ces flux sont infinis.

Nous supposons que le flux de vapeur qui arrive à l'interface est limité par une résistance placée "en amont", par exemple la résistance de diffusion en phase gazeuse, due à la présence de gaz incondensable. Nous posons que le flux constant est égal à F fois le flux que l'on observera en fin de période II (voir plus loin), c'est-à-dire quand le front de chaleur atteindra la paroi.

Vitesse de pénétration des profils et durée de la période I. A un instant t quelconque de cette période ($0 < t < t_2$), le profil de température est une fonction erfc. A un instant $(t + dt)$ ultérieur, le profil erfc s'est translaté en gardant la même pente de tangente pour $y = 0$ (puisque le flux entrant est constant par hypothèse). En se basant sur le principe de la simplification des profils erfc par leurs tangentes à l'origine (Fig. 5), le bilan thermique entre les instants t et $t + dt$ s'écrit :

$$\Phi_{T1} dt = \bar{C}_m \bar{\rho} y_T dT_e = \bar{C}_m \bar{\rho} (T_e - T_{e1}) dy_T. \quad (7)$$

En combinant cette relation avec la loi de Fourier et en intégrant, on obtient l'expression de la profondeur de pénétration en fonction du temps :

$$y_T = \sqrt{2at}. \quad (8)$$

On en déduit alors la durée de la période I, soit :

$$t_2 = \frac{\delta^2}{2aF^2} \quad \text{avec} \quad F \equiv \frac{\Phi_{T1}}{\Phi_{T3}} \quad (9)$$

où F est le rapport du flux (constant) pendant la période I, au flux Φ_{T3} , en fin de période II.

La trajectoire du point d'interface pendant cette première période se détermine en partant du fait que le raisonnement ci-dessus peut être intégralement transposé à la diffusion de la matière. On obtient alors l'expression de la profondeur de pénétration du front de concentration :

$$y_M = \sqrt{2Dt} \quad (10)$$

d'où l'on déduit l'équation de la trajectoire du point d'interface :

$$\frac{T_e - T_{e1}}{C_e - C_{e1}} = \frac{H_d}{\bar{C}_m \bar{\rho}} \sqrt{Le} \quad (11)$$

à la fin de la période I, ce point a atteint l'isobare d'équilibre (T_{e2}, C_{e2}) .

3.3. Etude de la période II

Pendant cette période, le point d'interface (T_{e2}, C_{e2}) reste quasi-stationnaire. A un instant t ($t_2 < t < t_3$) le profil de température est une fonction erfc (Fig. 6). A un instant $t + dt$, ce profil s'est déformé vers l'intérieur. En remplaçant ces courbes par leurs tangentes, et par un

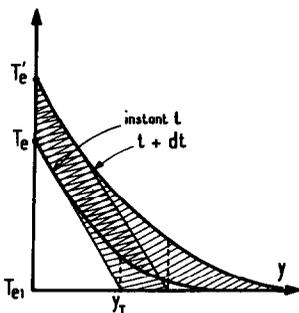


FIG. 5. Principe d'approximation des profils erfc par leur tangente, pendant la période I.

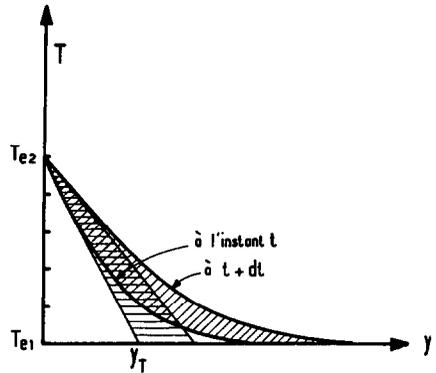


FIG. 6. Principe d'approximation des profils erfc par leur tangente, pendant la période II.

raisonnement calqué sur celui de la période I, on aboutit à l'expression de la durée de la période II, soit :

$$t_3 \approx \frac{\delta^2}{4a}. \quad (12)$$

On démontre en outre les propriétés suivantes :

- les fronts de pénétration progressent encore comme la racine carrée du temps, mais $\sqrt{2}$ fois plus vite que pendant la période I, soit :

$$y_T \approx 2\sqrt{at} \quad \text{et} \quad y_M \approx 2\sqrt{Dt} \quad (13)$$

- la densité de flux thermique, qui était supposée constante dans la lère période, décroît ici comme $t^{-1/2}$.

3.4. Etude des périodes III et IV

Le modèle simplissime, à profils linéaires, ne s'applique plus ici. En effet, le fait que le profil transversal de température a atteint la paroi n'est pas compatible avec la condition de paroi adiabatique, qui impose une tangente horizontale au profil de température en ce point.

C'est la raison pour laquelle nous proposons, dans ce qui suit, un modèle un peu moins simple, tout en conservant le principe du scénario en quatre périodes.

4. MODELE A PROFILS EN erfc

Dans le cadre de cette deuxième approche, nous considérons que les profils de T et C sont des fonctions-erreurs, telles que résultant de l'intégration des équations différentielles. Nous fixons, arbitrairement, l'épaisseur de la couche limite, à la profondeur de pénétration pour laquelle la fonction erfc est tombée à 1% de sa valeur à l'interface.

4.1. Etude des périodes I et II

Il en résulte que dans les périodes I et II, les expressions fonctionnelles de la durée de ces périodes, de la profondeur de pénétration et des flux de matière et

Tableau 1.

Variables	Modèles à profils linéaires	Modèles à profils en arc
Période I (Equilibrage de l'interface)		
Flux thermique à l'interface	Constantes par hypothèse, avec: $\phi_{T1} = F \cdot \phi_{T3}$	
Température d'interface	$T_e = T_1 + \frac{\phi_{T1}}{\lambda} \cdot \sqrt{2at}$	$T_e = T_1 + \frac{\phi_{T1}}{\lambda} \sqrt{\pi at}$
Concentration d'interface	$C_e = C_1 + \frac{\phi_{M1}}{D} \cdot \sqrt{2Dt}$	$C_e = C_1 + \frac{\phi_{M1}}{D} \sqrt{\pi Dt}$
Profondeurs de pénétration		
— thermique	$y_T = \sqrt{2at}$	$y_T = 4\sqrt{at}$
— matérielle	$y_M = \sqrt{2Dt}$	$y_M = 4\sqrt{Dt}$
durée de la période I	$t_2 = \delta^2/2aF^2$	$t_2 = \delta^2/16aF^2$
Période II (Traversée du profil thermique)		
Flux thermique à l'interface	$\phi_T = \lambda(T'_1 - T_1) \cdot \frac{rLe^{1/2}}{(rLe^{1/2} - 1)2\sqrt{at}}$	$\Phi_T = \lambda(T'_1 - T) \frac{rLe^{1/2}}{(rLe^{1/2} - 1)\sqrt{\pi at}}$
Température d'interface	$T_e = T_{e2} = \frac{T_1 - T'_1 rLe^{1/2}}{1 - rLe^{1/2}} = \text{cste}$	idem
Concentration d'interface	$C_{e2} = AT_{e2} + B = \text{cste}$	idem
Profondeurs de pénétration		
— thermique	$y_T \simeq 2\sqrt{at}$	$y_T \simeq 4\sqrt{at}$
— matérielle	$y_M \simeq 2\sqrt{Dt}$	$y_M \simeq 4\sqrt{Dt}$
Durée de la période II	$t_3 \simeq \delta^2/4a$	$t_3 \simeq \delta^2/16a$
Flux thermique à la fin de la période II	$\Phi_{T3} = \frac{\lambda}{\delta} (T_{e2} - T_1)$	$\Phi_{T3} = \frac{\lambda}{\delta} (T_{e2} - T_1) \cdot 4/\sqrt{\pi}$
Périodes III et IV (remplissages thermique puis matériel)		
Flux thermique à l'interface		$\Phi_T = (T'_1 - T_1) \left[\frac{rLe^{1/2} f(t)}{rLe^{1/2} \frac{f(t)}{g(t)} - 1} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi at}}$
Température d'interface	Modèle non	$T_e = \frac{T_1 - T'_1 r \cdot Le^{1/2} \cdot f(t)/g(t)}{1 - rLe^{1/2} \cdot f(t)/g(t)}$
Concentration d'interface	representatif	$C_e = AT_e + B$
Durée de la période III		$t_4 \simeq \delta^2/16D$
Durée de la période IV		$t \rightarrow \infty$
Température limite atteinte asymptotiquement pour $t = \infty$		$T_e = \bar{T} = T_g$

Avec

$$f(t) = 1 - 2 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p [\exp(-\delta^2/Dt)]^{(p+1)^2}$$

 $g(t)$ est obtenue en remplaçant D par a dans $f(t)$.

de chaleur ont exactement la même forme que dans le modèle linéaire simplissime comme le montre le Tableau 1. Seuls quelques coefficients numériques sont modifiés.

4.2. Etude de la période III

Etant donné que le front thermique a atteint la paroi, le profil de température n'est plus donné par une simple fonction erfc. La méthode classique de "réflexion-superposition" [7] permet de la représenter par la série infinie de fonctions erfc suivante :

$$T(t, y) - T_1 \simeq [T_e(t) - T_1] \sum_{p=0}^{\infty} \left[(-1)^p \operatorname{erfc} \left(\frac{y + 2p\delta}{\sqrt{4at}} \right) + (-1)^p \operatorname{erfc} \left(\frac{-y + 2(p+1)\delta}{\sqrt{4at}} \right) \right]. \quad (14)$$

On remarque que le premier terme ($p = 0$) correspond à la solution de la deuxième période, donc que les solutions des 2ème et 3ème périodes se raccordent continûment.

Quant au phénomène de diffusion de matière, son front n'a pas encore atteint la paroi et par suite le profil de concentration s'écrit tout simplement :

$$C(t, y) - C_1 \simeq [C_e(t) - C_1] \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{\sqrt{4Dt}} \right). \quad (15)$$

La durée de la période III est :

$$t_4 \simeq \frac{\delta^2}{16D}. \quad (16)$$

4.3. Etude de la période IV

A partir du temps t_4 , le profil de concentration ayant atteint la paroi, il faut alors appliquer la méthode de réflexion-superposition aux deux phénomènes thermique et matériel.

Le calcul montre que pendant cette période IV, l'expression (14) du profil de température reste valable et que, pour le profil de concentration, on obtient une expression similaire, où il suffit de remplacer T par C et a par D .

5. UN EXEMPLE CHIFFRE

Appliquons les formules du modèle précédent à un exemple chiffré, celui de l'absorption de vapeur d'eau dans un film ruisselant d'une solution concentrée de bromure de lithium, dont les caractéristiques et les conditions opératoires sont regroupées dans le Tableau 2.

L'application des résultats du modèle à profils en erfc développé précédemment à l'exemple du film type du Tableau 2, aboutit aux conclusions suivantes :

- La première période ne dure que 0,4 ms et le flux de chaleur transféré est de 334 kW m^{-2} (nous avons supposé $F = 10$). La hauteur de chute pendant cette très courte période est $0,06 \times 10^{-3} \text{ m}$. (Ce résultat a d'ailleurs pour conséquence que nous pourrions

Tableau 2. Exemple chiffre

Solution concentrée d'alimentation :

$$x_1 = 60\% \text{ LiBr en masse} \quad C_1 = 662 \text{ kg d'eau m}^{-3}$$

valeurs moyennes pour $25 < T < 65^\circ\text{C}$ et $0,55 < x < 0,60$

$$\rho = 1,65 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\mu = 3 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

$$D = 1 \times 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$a = 1,32 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$\bar{C}_m = 1,8 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

Film-type

$$\text{— vitesse moyenne d'écoulement : } u_f \simeq 0,154 \text{ m s}^{-1}$$

$$\text{— épaisseur de film : } \delta \simeq 0,3 \text{ mm}$$

$$\text{— nombre de Reynolds : } Re = \mu_f \delta / \nu = 24,2$$

négliger la 1ère période, au cours des raisonnements ultérieurs.)

- La seconde période dure 40 ms, avec une hauteur de chute de $6,5 \times 10^{-3} \text{ m}$. La température d'interface reste constante et égale à $36,2^\circ\text{C}$ pendant cette période. La concentration d'interface reste également constante et égale à 831 kg m^{-3} . Le flux de transfert décroît et passe de 334 à $33,4 \text{ kW m}^{-2}$. La température moyenne croît de 25 à 28°C et la concentration moyenne croît légèrement de 662 à 666 kg m^{-3} .
- La troisième période dure 5,5 s avec une hauteur de chute de $0,85 \text{ m}$. La température moyenne croît de 28 à 48°C et la concentration moyenne croît de 666 à 694 kg m^{-3} . Le flux de chaleur décroît de 33 à environ 1 kW m^{-2} .
- La quatrième période a une durée théoriquement infinie. Les valeurs asymptotiques de la température et de la concentration sont : $T_\infty = 58,5^\circ\text{C}$ et $C_\infty = 706 \text{ kg m}^{-3}$.

L'efficacité thermique relative moyenne définie par $\bar{\eta}_T = (\bar{T} - T_1) / (T_\infty - T_1)$, partant de zéro, est égale à 0,09 en fin de deuxième période, égale à 0,70 en fin de troisième période et serait égale à un en fin de quatrième période, soit pour t infini.

6. COMPARAISON AVEC LE MODELE RIGOREUX

Dans la publication précédente [1], nous avons traité exactement ce même exemple chiffré, en procédant à la résolution numérique rigoureuse des équations différentielles des transferts couplés de matière et de chaleur. Les résultats de ce calcul rigoureux sont rassemblés dans la 3ème colonne du Tableau 3. Par comparaison, dans les deux premières colonnes de ce tableau, sont rassemblés les résultats des modèles simplissimes, avec profils linéaires ou en erfc.

On constate, sur ce tableau, que le modèle à profils

Tableau 3.

	Modèle simplissime		Résultats de la résolution numérique des équations différentielles [1]
	à profils linéaires ($F = 10$)	à profils en erfc ($F = 10$)	
I ère période : état final—mise en équilibre de l'interface $z_1 < z < z_2$ Point d'équilibre instantané d'interface Durée	$z_2 = 0,5 \times 10^{-3}$ m	$z_2 = 0,06 \times 10^{-3}$ m $T_e = 36,2^\circ\text{C}$ $C_{e2} = 831 \text{ kg m}^{-3}$	$z_2 = \text{négligeable}$ $T_e = 36,5^\circ\text{C}$ $C_{e2} = 830 \text{ kg m}^{-3}$
II ème période : état final—traversée du profil thermique $z_2 < z < z_3$ Densité de flux d'interface Interface Durée	$z_3 \approx 26 \times 10^{-3}$ m $14,8 < \Phi_T(z) < 148 \text{ kW m}^{-2}$	$z_3 = 6,5 \times 10^{-3}$ m $33,4 < \Phi_T(z) < 334 \text{ kW m}^{-2}$ Stationnaire $T_e = 36,2^\circ\text{C}$ $C_e = 831 \text{ kg m}^{-3}$ $25 < \bar{T} < 28,2^\circ\text{C}$ $622 < \bar{C} < 666 \text{ kg m}^{-3}$	$z_3 = 6 \times 10^{-3}$ m $30 < \Phi_T < 55 \text{ kW m}^{-2}$ Stationnaire $T_e = 36,5^\circ\text{C}$ $C_e = 830 \text{ kg m}^{-3}$ $25 < \bar{T} < 28,4^\circ\text{C}$ $662 < \bar{C} < 680 \text{ kg m}^{-3}$
Valeurs moyennes	$25 < \bar{T} < 30,6^\circ\text{C}$ $662 < \bar{C} < 669 \text{ kg m}^{-3}$	$z_4 = 0,85$ m Φ_T décroissant \bar{T} et \bar{C} croissants calculables par séries convergentes	$z_4 = 0,70$ m $1 < \Phi_T(z) < 30 \text{ kW m}^{-2}$ $28,4 < \bar{T} < 48^\circ\text{C}$ $680 < \bar{C} < 694 \text{ kg m}^{-3}$
III ème période : état final—traversée du profil de concentration $z_3 < z < z_4$ Densité de flux d'interface Valeurs moyennes Durée	Non représentatif		
IV ème période : état final—atteinte de l'état permanent à l'infini $z_4 < z < \infty$ État permanent ($z \rightarrow \infty$)	$C_\infty = 706 \text{ kg m}^{-3}$	$T_\infty = 58,5^\circ\text{C}$ $C_\infty = 706 \text{ kg m}^{-3}$ (d'après la droite opératoire)	$T_\infty = 58,5^\circ\text{C}$ $C_\infty = 706 \text{ kg m}^{-3}$
Conditions initiales; $z_1 = 0, T_1 = 25^\circ\text{C}, x_1 = 0,6 \text{ kg sel/kg solution}, C_1 = 662 \text{ kg eau m}^{-3}$.			

linéaires, cesse d'être représentatif pour les grands temps de contact. Par contre il apparaît une cohérence satisfaisante entre les résultats du modèle à profils en erfc, et ceux de la résolution numérique complète des équations différentielles. Il est à noter que les hauteurs de chute correspondantes à la fin des 1ère, 2ème et 3ème périodes seront toujours sur-estimées par les deux modèles simples. En effet, la profondeur de pénétration de T et/ou C atteint la paroi à une côte plus grande que celle où la valeur de T et/ou C à la paroi commence à "décoller" de sa valeur initiale.

Par ailleurs, l'écart éventuel entre le modèle à profils en erfc et le modèle numérique ne peut provenir que de la précision des deux techniques numériques et non de considérations physiques fondamentales.

7. CONCLUSION

Dans le présent article, nous avons développé et appliqué pour un absorbeur adiabatique à film ruisselant, un modèle analytique simple basé sur la pénétration *couplée* des fronts thermique et matériel. Ce modèle qui consiste à découper le processus d'absorption gaz-liquide en quatre périodes permet d'avoir un ordre de grandeur de l'évolution des profils de température et de concentration ainsi que des densités de flux. Par ailleurs, il permet surtout de comprendre d'une manière intuitive et concrète la compétition des transferts simultanés dans un absorbeur tel que celui d'une pompe à chaleur à absorption. La comparaison entre les résultats de ce modèle et ceux de l'intégration numérique des équations différentielles, est assez satisfaisante.

Enfin, il est à noter que la méthodologie adoptée pour un absorbeur adiabatique (où l'on cherche à porter la solution à un niveau de température élevé) peut être aisément transposée au cas de l'absorbeur isotherme (où l'on cherche à maximiser le flux de chaleur transféré). Comme la plupart des objectifs industriels sont des compromis entre les critères de qualité et de quantité, le fonctionnement réel d'un absorbeur pour pompe à chaleur est alors intermédiaire entre les deux cas précités. Dans une autre publication [8] nous présenterons la modélisation d'un absorbeur à film ruisselant où la condition limite à la paroi est quelconque.

REFERENCES

1. H. Le Goff, A. Ramadane et P. Le Goff, Modélisations des transferts couples de matière et de chaleur dans l'absorption gaz-liquide en film ruisselant laminaire, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **28**, 2005-2017 (1985).
2. A. P. Colburn, *Trans. Am. Inst. Chem. Eng.*, **29**, 174 (1933).
3. H. Le Goff, Thèse de Docteur-Ingénieur, INPL, Nancy (1983).
4. H. Le Goff et P. Le Goff, Colloque International, *La technique du film appliquée aux opérations du génie chimique*, Rueil Malmaison (avril 1983).
5. P. Vernotte, *C.r. hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **246**, No. 22 (1958); **247**, No. 4 (1959).
6. A. V. Luikov, *Int. J. Heat Mass Transfer* **18**, 1-14 (1975); et

Colloque International CNRS, Transferts dans les milieux poreux, No. 160, pp. 21-45 (1967).

7. Carslaw et Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*. Clarendon Press, Oxford (1959).
8. H. Le Goff, A. Ramadane et P. Le Goff, Modélisation des transferts simultanés de matière et de chaleur dans un absorbeur à film ruisselant intégré à un échangeur, à paraître dans *Rev. gén. Thermique* (1986).

ANNEXE

Droite opératoire

Considérons une tranche de hauteur dZ d'un film ruisselant sur une surface verticale (Fig. A1). Le bilan thermique sur cette tranche dans le cas général s'écrit :

$$H_d \cdot dM_e = dQ_i + dQ_f + \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \Omega dZ. \tag{A1}$$

Dans le cas particulier où la paroi est adiabatique ($dQ_i = 0$) et le régime est permanent ($\partial \bar{H} / \partial t = 0$), l'équation (A1) se réduit à :

$$H_d \cdot dM_e = dQ_f \tag{A2}$$

avec

$$Q_f = \bar{H} M_f. \tag{A3}$$

D'autre part les bilans matériels donnent :

$$M_f \cdot \bar{x} = M_s = \text{cste} \tag{A4}$$

$$M_e = M_f(1 - \bar{x}).$$

En combinant (A2)-(A4) on aboutit à l'équation suivante :

$$\frac{d\bar{x}}{\bar{x}} = \frac{d\bar{H}}{\bar{H} - H_d}. \tag{A5}$$

Son intégration permet d'établir l'équation de la "droite opératoire" :

$$\frac{\bar{H} - H_1}{\bar{x} - x_1} = - \frac{H_d - H_1}{x_1} = \text{cste}. \tag{A6}$$

Droite de conjugaison

Supposons qu'il existe une couche limite à l'interface gaz-liquide à travers laquelle diffuse le solvant ; on peut écrire alors :

$$dM_e = k\rho(\bar{x} - x_e)l dZ \tag{A7}$$

de même pour la chaleur ;

$$dQ_e = h(T_e - \bar{T})l dZ \simeq \frac{k}{C_m} (H_e - \bar{H})l dZ \tag{A8}$$

k désigne la conductance de transfert de matière et h la

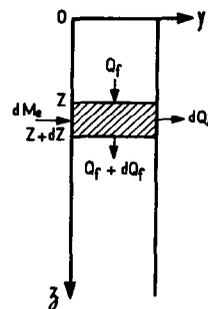


FIG. A1. Schéma d'une tranche de hauteur dZ d'un absorbeur à film ruisselant.

conductance de transfert de chaleur par conduction et convection entre l'interface et le coeur du film.

Dans l'hypothèse où la majorité du flux de chaleur de l'interface diffuse par conduction-convection, on peut écrire :

$$H_d \cdot dM_e = dQ_e. \quad (A9)$$

La combinaison de (A7)-(A9) donne :

$$\frac{H_c - \bar{H}}{x_c - \bar{x}} \approx -H_d \cdot \frac{k\rho\bar{C}_m}{h}.$$

L'analogie des transferts de matière et de chaleur peut se

traduire par une relation du type :

$$St_M(Sc)^n = St_T(Pr)^n.$$

En explicitant chacun de ces nombres adimensionnels on trouve :

$$\frac{k\rho\bar{C}_m}{h} = Le^n.$$

D'où l'équation finale de la droite de conjugaison :

$$\frac{H_c - \bar{H}}{x_c - \bar{x}} = -H_d \cdot Le^n.$$

Dans le cas de l'analogie de Colburn l'exposant n vaut $2/3$.

A SIMPLE MODEL OF THE COUPLED PENETRATION OF HEAT AND MASS TRANSFER FOR GAS-LIQUID ABSORPTION IN A LAMINAR FALLING FILM

Abstract—In this paper we present a simple model based on the coupled penetration of heat and mass fronts for the study of the absorption kinetics of vapor in a concentrated salt solution falling in laminar flow down an adiabatic wall. Though this model is very simple, it permits a concrete and intuitive comprehension of the numerical integration of differential equations. The forecasts of this model, in the case of the absorption of water vapor in the lithium bromide solution, are presented and compared to the results of the numerical solution.

EIN EINFACHES PENETRATIONSMODELL FÜR DEN GEKOPPELTEN WÄRME- UND STOFFAUSTAUSCH BEI DER GAS-FLÜSSIG ABSORPTION IN LAMINAREN RIESELFILM

Zusammenfassung—In dieser Veröffentlichung stellen wir ein einfaches Modell vor, das auf der gekoppelten Penetration von Temperatur- und Konzentrationsprofilen beruht. Es dient dazu, die Kinetik der Absorption eines Dampfes in einer hochkonzentrierten Sole zu untersuchen, die laminar an einer adiabaten Wand herabrieselt. Obwohl es sehr einfach ist, kann mit diesem Modell der gekoppelte Austausch erfasst und anschaulich erklärt sowie die Ergebnisse der numerischen Integration der Differentialgleichungen beschrieben werden. Die Vorhersagen dieses Modells werden für den Fall der Absorption von Wasserdampf in einer Lithiumbromidlösung vorgestellt und mit den numerischen Ergebnissen des exakten Modells verglichen.

ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ СОВМЕСТНОГО ТЕПЛО-И МАССООБМЕНА ПРИ ПОГЛОЩЕНИИ ГАЗА ЛАМИНАРНО СТЕКАЮЩЕЙ ПЛЕНКОЙ ЖИДКОСТИ

Аннотация—Предложена простая модель кинетики поглощения пара пленкой концентрированного раствора соли, ламинарно стекающего по адиабатической стенке. В основу модели положен анализ совместного распространения фронтов тепла и массы. Хотя эта модель очень проста, она правильно описывает результаты численного интегрирования дифференциальных уравнений. Расчеты по данной модели для случая поглощения водяного пара раствором бромиды лития сравниваются с результатами вычислений.